Energía & Sostenibilidad

Volumen 1, Número 1, 2025

GEOVOLTAICA

Revista de Energía y Sostenibilidad

Donde la energía del sol y la tierra se unen para construir un futuro sostenible y en armonía con el ambiente.

ISSN: En trámite

Información Legal

Geovoltaica Revista de Energía y Sostenibilidad, Año 1, Número 1. Enero-Abril 2025, es una publicación cuatrimestral, editada por el Dr. Néstor Daniel Galán Hernández, Coto 12 Número 4902, Real del Valle, 82124 Mazatlán, Sinaloa, México, https://www.revistageovoltaica.com E-mail: editor@revistageovoltaica.com. Editores responsables: Dr. Eber Enrique Orozco Guillén, Dr. Guillermo Rubio Astorga y Dr. Erik Vázquez Fernández. Reserva de derechos al uso exclusivo En trámite, ISSN: En trámite. Ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Dr. Néstor Galán. Real del Valle, Coto 12, Núm 4902. Código Postal 82124. Fecha de última Actualización 07 de Marzo de 2025. Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura de los editores de la publicación.

GEOVOLTAICA

Revista de Energía y Sostenibilidad

revistageovoltaica.com

Editorial

Innovar, colaborar y transformar: Nuestro rol en la construcción de un futuro sostenible"

En el escenario actual, donde los desafíos energéticos y ambientales demandan soluciones innovadoras y sostenibles, nace Geovoltaica, una publicación dedicada a explorar y analizar las intersecciones entre energía, sostenibilidad y desarrollo tecnológico. Este primer número marca el inicio de un espacio de diálogo y reflexión sobre temas de importancia para el sector académico, profesional y público en general. La crisis climática ha dejado de ser una advertencia para convertirse en una realidad que exige acciones inmediatas y efectivas. El incremento en las emisiones de gases de efecto invernadero, junto con el agotamiento de recursos naturales, nos urge a repensar nuestros modelos de producción y consumo energético. En este contexto, las energías renovables son alternativas viables para la supervivencia y el desarrollo sostenible.

Geovoltaica se propone como una plataforma para explorar investigaciones e innovaciones en tecnologías limpias, desde los avances en energía solar fotovoltaica y eólica hasta las prometedoras aplicaciones del hidrógeno verde. Nuestro compromiso es presentar investigaciones rigurosas, análisis técnicos y casos de estudio que demuestren la viabilidad y eficiencia de estas soluciones. La calidad y eficiencia energética ocupan un lugar central en nuestra agenda editorial. Entendemos que la transición hacia un futuro sostenible requiere no solo de nuevas fuentes de energía, sino también de una gestión más inteligente y eficiente de los recursos existentes. Las Smart Grids, el almacenamiento energético y las tecnologías de gestión de la demanda son temas que requieren análisis en profundidad.

El cambio climático, como fenómeno global, exige respuestas coordinadas y multidisciplinarias. Por ello, nuestras páginas darán cabida a voces expertas de diversos campos: ingeniería, ciencias ambientales, economía y política energética. Esta aproximación holística nos permitirá abordar la complejidad de los retos actuales desde múltiples perspectivas. Geovoltaica nace con la convicción de que el conocimiento y la difusión de información técnica especializada son fundamentales para impulsar la transición energética. Invitamos a investigadores, profesionales y expertos del sector a contribuir con sus conocimientos y experiencias en los próximos números.

En este primer número, presentamos una selección de artículos que abordan desde innovaciones en tecnología fotovoltaica para alumbrado público, hasta estrategias de control y eficiencia energética en entornos rurales con mecanismos de automatización. Cada texto ha sido cuidadosamente seleccionado y se ha adoptado el sistema de arbitraje doble ciego para ofrecer información relevante y actualizada, manteniendo el rigor técnico que caracterizará a nuestra publicación.

En un mundo donde la sostenibilidad energética se ha convertido en un imperativo global, Geovoltaica se compromete a ser un referente en la difusión de conocimiento técnico y científico sobre energías limpias y desarrollo sostenible. A quienes investigan, desarrollan y cuestionan los paradigmas actuales: esta es su plataforma. Porque cada hallazgo, cada modelo y cada solución aplicada nos acercan a un mundo más eficiente, resiliente y equitativo.

Esperamos que este primer número sea el inicio de un diálogo productivo y constructivo sobre el futuro energético.

Dr. Néstor Daniel Galán Hernández

Editor en jefe

Geovoltaica

Revista de Energía y Sostenibilidad

CONTENIDO

Modelado e implementación de sistema mecánico masa-resorte-amortiguador: Una revisión

Modeling and implementation of mechanical system mass-spring-damper: A review

Mayra M. Ayala García[1], Omar A. Mendoza Aguilar[1], Kassandra Meza Ibarra[1], Xiomara V. Moreno Núñez[1], Guillermo J. Rubio Astorga[1], Omar I. Gaxiola-Sánchez[1]

[1]Unidad de Posgrado, Tecnológico Nacional de México-Instituto Tecnológico de Culiacán, guillermo.ra@culiacan.tecnm.mx

Resumen

El análisis de sistemas mecánicos mediante herramientas de modelado y simulación es fundamental en la ingeniería. Lo anterior, debido a que propicia el entendimiento y la correcta interpretación de sistemas reales. Además, permite realizar ajustes que mejorar la eficiencia y rendimiento de los sistemas ante cambios. Este análisis se realiza mediante diversas técnicas como son: Álgebra de bloques, método de Mason, Bond Graph, espacio de estados, etc. Se realizó la simulación e implementación de un sistema masa resorte amortiguador que muestra que dichos modelos y su realización tienen el mismo comportamiento.

Palabras clave: Modelado matemático, sistema masa-resorte-amortiguador, función de transferencia.

Abstract

The analysis of mechanical systems using modeling and simulation tools is fundamental in engineering. Therefore, it promotes understanding and the correct interpretation of real systems. In this way, it is possible to comprehend and solve problems that involve knowledge of the behavior and structure of a real system. Furthermore, it allows improvement for adjustments that benefit the system in response to changes. This analysis used various techniques: Block algebra, Mason's method, Bond graph and state space. The simulation and implementation of a mass spring damper system was made, which shows that the applied techniques and their implementation have the same behavior.

Keywords: Mathematical modeling, mass-spring-damper system, transfer function.

Recibido: 29/11/2024; Aceptado 07/02/2025; Publicado 17/03/2025

Introducción

Un sistema es una combinación de componentes que actúan simultáneamente para alcanzar un objetivo definido [1]. Los sistemas pueden representarse de diversas formas, lo que da lugar a múltiples modelos matemáticos. En este sentido, un modelo matemático del sistema es aquel que determina las funciones matemáticas que representan el comportamiento de las variables de interés de éste [2]. Es decir, el modelo matemático muestra las ecuaciones que nos permiten representar, lo más cercano a la realidad, un sistema.

Una función de transferencia son expresiones matemáticas que caracterizan la relación de entrada y salida del sistema. Dichas expresiones se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales en el tiempo. Mientras que la relación entre la entrada y salida se describe como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida (respuesta) y la transformada de Laplace de la entrada, en condiciones iniciales equivalentes a cero [1].

Por lo anterior, la función de transferencia es un elemento muy valioso en los sistemas. Al describir la relación entre la respuesta y las variables de entrada, es posible comprender y analizar el comportamiento de los sistemas. Así como existen múltiples modelos matemáticos, existen diversas técnicas para obtener la función de transferencia. Dentro de esta diversidad, puede ser complejo determinar qué técnica o herramienta utilizar. Lo anterior puede responderse dependiendo de los conocimientos previos y las herramientas disponibles. Sin embargo, se investigará si las técnicas aplicadas conducen a la misma función de transferencia. De esta manera, corroborar que, aplicando correctamente cada técnica, el resultado debe ser homogéneo. Así, al comprender cada técnica se puede tomar una mejor decisión a la hora de escoger una técnica dependiendo de los recursos disponibles. Aunado a esto, se garantiza una mejor comprensión del sistema de interés. Por último, se verificará que, aplicando correctamente las técnicas, existen múltiples herramientas que nos permiten determinar la función de transferencia de los sistemas. Además, cabe mencionar, el sistema masa resorte amortiguador tiene importantes aplicaciones prácticas en la vida real. Su implementación en la suspensión de vehículos, así como en la atenuación de vibraciones en edificaciones, puentes y maquinaria industrial, destaca la importancia en modelar y analizar este tipo de sistemas, tanto para su diseño como para su óptimo funcionamiento [3][4].

Por lo tanto, este artículo tiene como objetivo demostrar que, independientemente de la técnica utilizada, la función de transferencia obtenida debe ser la misma.

<u>Sistema de estudio</u>

El sistema de interés corresponde a un sistema mecánico conformado por dos masas (m_1 y m_2), dos resortes (k_1 y k_2) y un amortiguador (b_1). Está afectado por una fuerza de salida (u) y cuenta con dos salidas (y_1 y y_2) y está descrito por las ecuaciones 1 y 2. Por lo anterior, se obtendrán dos funciones de transferencia correspondientes a cada salida. En la figura 1, se encuentra una representación gráfica del sistema antes descrito.

Los valores o parámetros del sistema fueron definidos previamente. Por otra parte, los parámetros para el sistema real fueron calculados; todos éstos se encuentran señalados en la tabla 1.

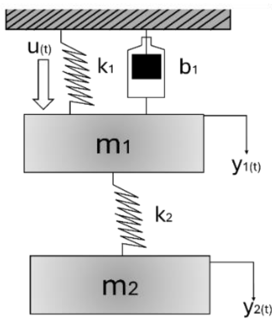


Figura 1. *Sistema masa-resorte-amortiguador estudiado*

Tabla 1. *Parámetros del sistema de estudio y real*

Parámetro	Ejercicio	Real
u(t)	15 N	45.28 N
k1	130	392.4
k2	150	981
b1	0.25 N/m	0.3836 N/m
m1	1.5 kg	4.53 kg
m2	0.5 kg	3.27 kg

Por otra parte, se muestran las ecuaciones 1 y 2 que son aquellas que rigen al sistema:

$$m_1 \frac{d^2 y_{1(t)}}{dt^2} = -(k_1 + k_2) y_{1(t)} - b_1 \frac{dy_{1(t)}}{dt} + k_2 y_{2(t)} + u_{(t)} \quad (1)$$

$$m_2 \frac{d^2 y_{2(t)}}{dt^2} = k_2 y_{1(t)} - k_2 y_{2(t)} \quad (2)$$

Metodología

En su totalidad, fueron aplicadas cinco técnicas diferentes. De cada una se obtuvo una función de transferencia y una representación gráfica de dicha función. Las técnicas aplicadas fueron: metodología de Laplace, álgebra de bloques, método de Mason, Bond graph y espacio de estados. Las técnicas antes mencionadas, salvo Bond graph, fueron ejecutadas y representadas en el software Matlab, fue así como se comprobaron los resultados. De esta manera se corrobora que existen múltiples formas de obtener la función de transferencia de un sistema.

<u>Metodología de Laplace</u>

Una manera sencilla de obtener la función de transferencia de un sistema es aplicando transformada de Laplace a las ecuaciones de dicho sistema. Considerando condiciones iniciales nulas, se parte de las siguientes ecuaciones 1 y 2. Aplicando la transformada de Laplace a cada ecuación se obtiene:

$$-(k_1 + k_2) y_{1(s)} - b_1 s y_{1(s)} + k_2 y_{2(s)} + u_{(s)} = m_1 s^2 y_{1(s)} \quad (3)$$

$$k_2 y_{1(s)} - k_2 y_{2(s)} = m_2 s^2 y_{2(s)} \quad (4)$$

Para obtener la función de transferencia de $y_2(s)$ es necesario despejarlo de la ecuación 4 y sustituirlo en la ecuación 3 como se muestra a continuación:

$$-(k_1 + k_2) y_{1(s)} - b_1 s y_{1(s)} + k_2 \left(\frac{k_2 y_{1(s)}}{m_2 (s)^2 + k_2} \right) + u_{(s)} = m_1 s^2 y_{1(s)} \quad (5)$$

$$\frac{y_{1(s)}}{u_{(s)}} = \frac{m_2 s^2 + k_2}{(m_1 m_2 s^4) + (b_1 s^3 m_1) + (m_1 k_2 + k_1 m_2 + k_2 m_2)(s^2) + (b_1 s k_2) + k_1 k_2} \quad (5.1)$$

De una manera más rápida se obtiene la función de transferencia para $y_2(s)$, utilizando la ecuación 5.1 de función de transferencia para $y_1(s)$. De la ecuación 4 se despeja $y_1(s)$ y se sustituye en la ecuación 5.1.

$$y_{1(s)} = \frac{(m_2 s^2 + k_2) y_{2(s)}}{k_2} \quad (6)$$

$$\frac{y_{2(s)}}{u_{(s)}} = \frac{k_2}{(m_1 m_2 s^4) + (b_1 s^3 m_1) + (m_1 k_2 + k_1 m_2 + k_2 m_2)(s^2) + (b_1 s k_2) + k_1 k_2} \quad (6.1)$$

<u>Diagrama y álgebra de bloques</u>

A diferencia de una representación matemática puramente abstracta, un diagrama de bloques posee la ventaja de representar de forma más realista el flujo de las señales del sistema real [1]. Expresa el sistema mediante bloques con ecuaciones organizados para una manipulación sencilla.

En este tipo de diagramas, todas las variables del sistema se enlazan unas con otras mediante bloques funcionales. Éstos son un símbolo para representar la operación matemática sobre la señal de entrada hacia el bloque para producir una salida. Las funciones de transferencia de los componentes, generalmente, se introducen en los bloques correspondientes, conectándose mediante flechas para indicar la dirección del flujo de señales [1].

Parte de sus ventajas recae en la facilidad de formar el diagrama de bloques general de todo el sistema con solo conectar los componentes adecuados. Mediante el flujo de señal, es posible evaluar la contribución de cada componente en el desempeño general del sistema [1]. Para abordar el sistema de estudio de la figura 1, se parte de las ecuaciones 3 y 4.

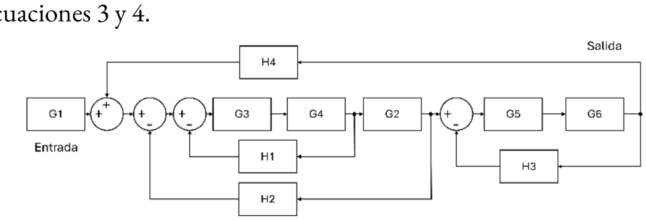


Figura 2. *Diagrama de bloques propuesto para la salida* y_2

El diagrama de bloques propuesto se representa en la figura 2. Para obtener la función de transferencia es necesario realizar álgebra de bloques. Debido a que el término k_2/m_1 afecta tanto a $y_1(s)$ como a $y_2(s)$ la función de transferencia obtenida será de $y_2(s)$. Es necesario señalar que los diagramas cuentan con bloques de step y scope para aplicar la fuerza u y para visualizar la salida, respectivamente.

De esta manera se obtiene la función de transferencia para y_2:

$$FTy_2 = \frac{\frac{G3\cdot G4\cdot G2\cdot G1}{1+G3\cdot H1+G3\cdot G4\cdot H2}\cdot\frac{G5\cdot G6}{1+G5\cdot G6\cdot H3}}{\frac{1-G3\cdot G4\cdot G2}{1+G3\cdot H1+G3\cdot G4\cdot H2}\cdot\frac{H4\cdot G5\cdot G6}{1+G5\cdot G6\cdot H3}} \tag{7}$$

Una vez determinada la función de transferencia de la salida y_2, es necesario modificar el diagrama de la figura 2 para obtener la salida y_1. Con las modificaciones adecuadas se presenta en la figura 3 el diagrama para la salida y_1.

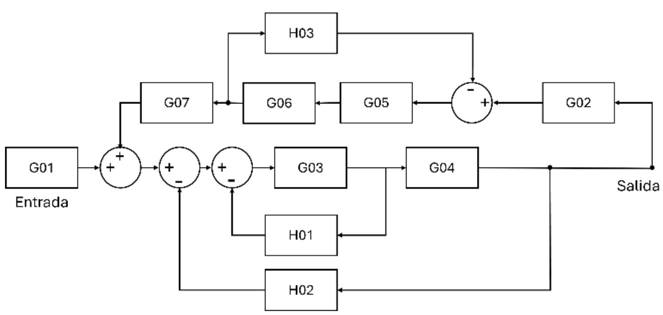


Figura 3. *Diagrama de bloques propuesto para la salida y1.*

Se obtiene el bloque de la función de transferencia para y1. La expresión obtenida es:

$$FTy_1 = \frac{\frac{G03\cdot G04\cdot G01}{1+G03\cdot H01+G03\cdot G04\cdot H02}}{\frac{1-G03\cdot G04}{1+G03\cdot H01+G03\cdot G04\cdot H02}\cdot\frac{G06\cdot G05\cdot G07\cdot G02}{1+G06\cdot G05\cdot H03}} \tag{8}$$

Método de Mason

Este método, también conocido como fórmula de ganancia de Mason, transforma el diagrama de bloques en un diagrama de flujo de señal o reograma. Es decir, es una versión simplificada de éste. En este caso, los bloques se convierten en señales y los sumadores en nodos. Consta de una versión simplificada que también nos permite llegar a la función de transferencia [5].

La ecuación utilizada para este método se puede observar en la ecuación 9 [6], donde Δ_k se refiere a la aportación de los lazos a las trayectorias, mientras que P_k a las trayectorias directas:

$$FT = \frac{F(s)}{F(i)} = \frac{\sum_{k=1}^{N} P_k\Delta_k}{\Delta} \tag{9}$$

La figura 4 representa el reograma para obtener la primera función de transferencia, es decir, y_1. En este se señala una única trayectoria que puede definirse como:

Trayectoria: $G01\cdot G03\cdot G04$

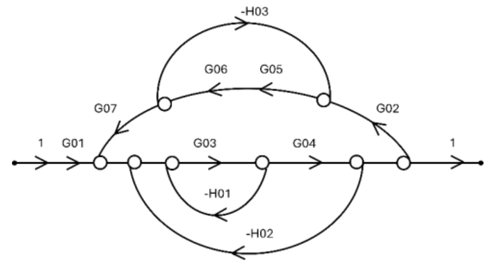


Figura 4. *Diagrama de flujo de señal propuesto para la salida y1.*

De la misma figura se determina que el sistema está conformado por cuatro lazos, que son:

$$L01{:}\ G03\cdot H01, L02{:}\ G03\cdot G04\cdot H02,$$
$$L03{:}\ G03\cdot G04\cdot G02\cdot G05\cdot G06\cdot G07$$

Con la figura 4 es notable que existen lazos que no se tocan. En este caso los pares $L01$ y $L03$, junto a $L02$ y $L03$ no se tocan. Con estos datos se define el determinante del sistema y de la trayectoria principal resultando:

$$\Delta = 1-(L01+L02+L03+L04) + L01\cdot L03 + L02\cdot L03$$
$$\Delta 1 = 1-L03$$

Las variables se declaran como:

$$G01 = \frac{1}{m1},\quad G02 = \frac{k2}{m2},\quad G03\ a\ G06 = \frac{1}{s},$$

$$G07 = \frac{k2}{m1},\ H01 = -\frac{b1}{m1},\ H02 = -\frac{k1+k2}{m1}, H03 = -\frac{k2}{m1}$$

Con la información obtenida, se genera un código en Matlab para determinar la función de transferencia. Al ejecutar el programa se obtiene la expresión matemática que representa a la función de transferencia para la salida:

$$y_1 = \frac{0.2373\,s^{18}+71.19\,s^{16}}{0.356\,s^{20}+0.05933\,s^{19}+173.2\,s^{18}+17.8\,s^{17}+9255\,s^{16}}$$

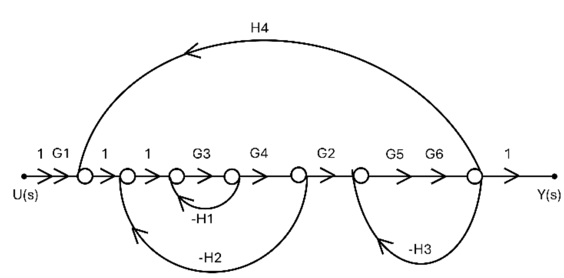


Figura 5. *Diagrama de flujo de señal propuesto para la salida y2.*

Para la salida y_2, se desarrolló otro reograma representado en la figura 5. De esta manera se obtiene la función de transferencia para la segunda salida. En este se señala una única trayectoria que puede definirse como:

Trayectoria: $G1 \cdot G3 \cdot G4 \cdot G2 \cdot G5 \cdot G6$

Con la figura 5, es notable que existen lazos que no se tocan. En este caso los pares $L1$ y $L3$, junto a $L2$ y $L3$ no se tocan. Con estos datos se define el determinante del sistema y de la trayectoria principal resultando:

$$\Delta = 1 - (L1 + L2 + L3 + L4) + L1 \cdot L3 + L2 \cdot L3 = 1$$

Las variables se declaran como:

$$G1 = \frac{1}{m_1}, \quad G2 = \frac{k_2}{m_2}, \quad G3 \; a \; G6 = \frac{1}{s},$$
$$H1 = -\frac{b_1}{m_1}, \quad H2 = -\frac{k_1 + k_2}{m_1}, \quad H3 = -\frac{k_2}{m_2}, \quad H4 = \frac{k_2}{m_1}$$

Con la información obtenida, se genera un código en Matlab para determinar la función de transferencia. Al igual que en la salida y_1, se ejecuta el código y se obtiene la siguiente expresión:

$$y_2 = \frac{71.19\, s^{16}}{0.356\, s^{20} + 0.05933\, s^{19} + 173.2\, s^{18} + 17.8\, s^{17} + 9255\, s^{16}}$$

Bond graph

Es una herramienta muy útil para el modelado de sistemas por su capacidad para describir el comportamiento dinámico. Lo anterior indica que es posible describir múltiples sistemas como mecánicos, hidráulicos, eléctricos, etc.

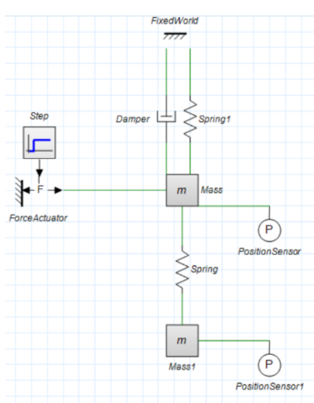


Figura 6. Modelo mecánico desarrollado en 20 Sim.

Esta técnica se fundamenta en la energía y su intercambio o transferencia entre los componentes del sistema [7]. De esta manera, se representa gráficamente las ecuaciones diferenciales del modelo [8]. La ventaja reside en su capacidad para modelar subsistemas independientemente que se relacionan a través del intercambio de esfuerzos y flujos de energía [9]. Esto permite un enfoque tanto particular como general del sistema ya que puede analizarse cada elemento que lo conforma y después, analizar su comportamiento global en el sistema [9].

También, pueden analizarse dos tipos de modelado. El primero es la representación gráfica, el segundo es el de esfuerzos y flujos. Lo que hace posible utilizar los elementos de cada dominio como bloques que representan al sistema. Por otra parte, se utilizan lazos y flechas. Cada línea o flecha representa la transferencia de energía [9]. Así, se puede representar el sistema de interés y determinar la señal que genera éste.

En las figuras 6 y 7 se representa el sistema tanto en un modelo mecánico como en el gráfico de bond. En la figura 8 se muestra la gráfica con las señales de respuesta de éstos.

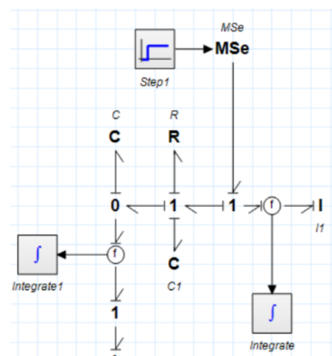


Figura 7. Gráfico de Bond propuesto para el sistema de estudio desarrollado en 20 Sim.

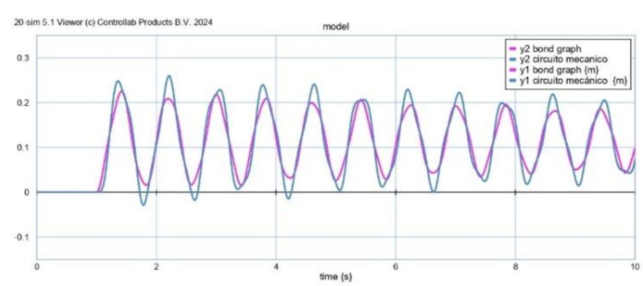


Figura 8. Gráfica de señales de respuesta en 20 Sim.

Espacio de estados

Este método se fundamenta en representar el sistema con un conjunto de n ecuaciones de primer orden, que puedan integrarse en una ecuación matricial de primer orden. Facilitando así, de manera significativa la representación matemática de dicho sistema de ecuaciones [10]. A través del espacio de estados se representa el sistema enfocándose en sus variables internas, denominadas variables de estado. Estas variables son las mínimas necesarias para describir la dinámica del sistema. Por otra parte, las ecuaciones de estado explican la relación entre estas variables, es decir, cómo dependen entre sí y su respuesta a la entrada y salida. Para representar un sistema en el espacio de estado, es necesario transformar sus ecuaciones de manera que se obtenga la variación en el tiempo de cada una de las variables de estado seleccionadas [11].

Esta representación puede derivarse de las ecuaciones diferenciales que describen al sistema o de cualquier conjunto de ecuaciones diferenciales.

Por otro lado, la función de transferencia es una ecuación que relaciona directamente la entrada y la salida del sistema sin observar qué pasa dentro del mismo. A partir de las ecuaciones de estado es posible obtener la función de transferencia usando ciertas operaciones matemáticas, entre ellas la transformada de Laplace, permitiendo resumir todo el comportamiento del sistema.

Para aplicar esta técnica, se dividió el sistema en dos partes. La primera parte abarca a las fuerzas que afectan a la m_1, en este caso son dos resortes, el amortiguador y la fuerza externa u.

Considerando la ecuación 1, es posible definir las variables de estado como: no hacer el desarrollo, mencionar que se llevaron por esta metodología y llevar a la ecuación final.

De las ecuaciones dinámicas del sistema (ecuación 1 para m_1 y ecuación 2 para m_2), se propuso una representación en el espacio de estados. Las variables y ecuaciones de estado se definieron para m_1 y m_2. Reorganizando las ecuaciones en forma matricial, el sistema quedó representado según las ecuaciones 10 y 11.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{10}$$
$$y(t) = Cx(t)Du(t) \tag{11}$$

sustituyendo las matrices:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-(k_1+k_2)}{m_1} & \frac{-b_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & \frac{-k_2}{m2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_{(t)}$$

$$y_{(t)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

A partir de esta representación, se utilizó la formulación general de espacio de estados y su transformación de Laplace (ecuación 12) para obtener la función de transferencia.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C[sI - A]^{-1}B + D \tag{12}$$

Por último, se realizan las operaciones matriciales en Matlab siguiendo el procedimiento descrito en la figura 9. Para esto, se definen las variables del sistema de la figura 1 y cada una de las matrices (A, B, C y D), junto a la matriz identidad (I). Con los elementos definidos se obtienen las funciones de transferencia para ambas salidas: primero utilizando la ecuación 12, y, posteriormente utilizando función ss2tf, que calcula directamente la función de transferencia a partir del espacio [12].

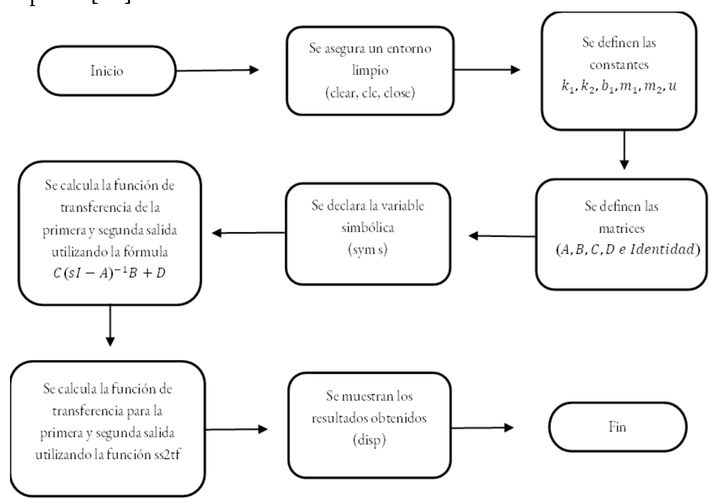


***Figura 9**. Procedimiento para obtener la función de transferencia para y_1 y y_2 a partir del espacio de estados en Matlab.*

Con este código se obtuvo la función de transferencia para cada una de las salidas y_1 y y_2 mostradas en la ecuación 13 y 14, respectivamente. Se obtuvo la función mediante dos códigos diferentes, pero, el resultado fue el mismo ya que, al comparar las salidas mediante bloques en Simulink, se obtuvo la misma.

$$y_1 = \frac{0.6667\,s^2 + 200}{s^4 + 0.1667\,s^3 + 486.7\,s^2 + 50\,s + 2.6e04} \tag{13}$$
$$y_2 = \frac{200}{s^4 + 0.1667\,s^3 + 486.7\,s^2 + 50\,s + 2.6e04} \tag{14}$$

<u>De función de transferencia a espacios de estados</u>

Para este método se hace el procedimiento inverso al espacio de estados, detallado paso a paso. En primer lugar, se parte de la función de transferencia correspondiente a y_1 (ecuación 13). Se manipula cruzando denominadores, de modo que se obtiene una ecuación polinómica en s que involucra a y_1 y a u. A continuación, se procede a integrar sucesivamente, tomando s como factor, para introducir nuevas variables de estado que encapsulan los términos resultantes. Después de la primera integración, se define una primera variable de estado x_1; tras la segunda, se introduce x_2; y así sucesivamente, hasta llegar a la cuarta variable de estado x_4.

Al finalizar el proceso, se obtienen cuatro ecuaciones de estado: $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3\ y\ \dot{x}_4$. Dichas ecuaciones se reorganizan de forma matricial para llegar al modelo en espacio de estado (ecuación 10 y 11).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2.6*10^4 & -50 & -486.7 & -0.1667 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad D = [0]$$

Repetimos el mismo procedimiento para la salida de y_2 $(ecuación\ 14)$, teniendo como resultado las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2.6*10^4 \\ 1 & 0 & 0 & -50 \\ 0 & 1 & 0 & -486.7 \\ 0 & 0 & -1 & -0.1667 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{bmatrix} C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\, D = [0]$$

<u>Discretización</u>

El proceso de discretización es un método que convierte a las ecuaciones que gobiernan el sistema a ecuaciones discretas [13]. Este proceso, también conocido como muestreo, reemplaza la señal continua por un conjunto de valores tomados en diferentes puntos discretos de tiempo [14]. Con lo anterior, este proceso simplifica el análisis de los sistemas ya que solo considera ciertos valores del tiempo continuo. No obstante, para determinar que la discretización se ha ejecutado correctamente, ésta debe representar adecuadamente las características esenciales del sistema [14]. Lo anterior se traduce en que, la señal generada del proceso de discretización debe tener un comportamiento aproximado a la señal real o continua del sistema.

Para nuestro sistema, una vez que se corroboraron que todos los métodos aplicados generan las mismas salidas, añadimos la línea de discretización. Utilizando las funciones de Matlab, se realizó una discretización con un tiempo de muestra de 0.05 para ambas salidas (y_1 y y_2), obteniendo así las ecuaciones 15 y 16.

$$y_1 = \frac{7.997x10^{-4}\, z^3 - 2.392x10^{-4}\, z^2 - 2.34x10^{-4}\, z + 7.974x10^{-4}}{z^4 - 2.87\, z^3 + 3.88\, z^2 - 2.859\, z + 0.9917} \quad (15)$$

$$y_2 = \frac{4.99x10^{-5}\, z^3 + 5.126x10^{-4}\, z^2 + 5.117x10^{-4}\, z + 4.968x10^{-5}}{z^4 - 2.87\, z^3 + 3.883\, z^2 - 2.859\, z + 0.9917} \quad (16)$$

Se seleccionó este tiempo a causa de su similitud con el comportamiento del sistema real. Además, al trabajar con un sistema real nos permite tomar las muestras necesarias para garantizar el comportamiento modelado.

<u>Métodos para obtener la función de transferencia</u>

Se compararon las respuestas de las técnicas mediante bloques de Simulink para corroborar que las salidas son iguales. En el programa se definieron bloques de cada una de las técnicas, salvo bond graph. También se encuentra la discretización y la función de transferencia del sistema real. Al correr el sistema se generaron dos bloques finales de salida, uno para y_1 y y_2, representados en las figuras 10 y 11 respectivamente. Al analizar las figuras es notable que todas las líneas evaluadas se sobreponen, lo que indica que la señal es la misma.

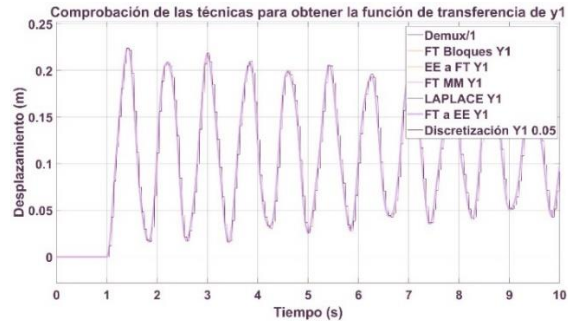


Figura 10. *Comprobación para la salida* y_1.

Figura 11. *Comprobación para para la salida* y_2.

Resultados

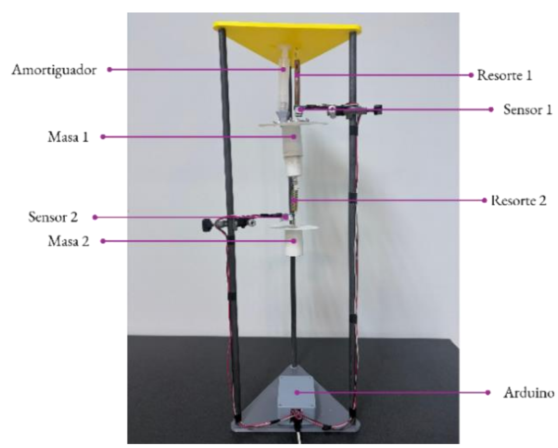


Figura 12. *Sistema MRA propuesto en la realidad.*

La base y la parte superior del sistema fueron fabricadas a medida mediante impresión 3D. Se conectaron sensores ultrasónicos HC-SR04 que miden la distancia, lo cual nos permite medir las oscilaciones del sistema una vez aplicadas las fuerzas del escalón que representan la fuerza externa u. Para que este sistema coincida con la representación matemática calculada anteriormente, se determinaron nuevos valores para las variables. Con el cálculo de las determinantes, se obtuvieron los valores para las masas y la fuerza externa descritos en la tabla 1.

En la figura 12 se aprecia el sistema terminado y su configuración como un sistema masa-resorte-amortiguador.

Con estos elementos, y un microcontrolador, se elaboró un sistema de medición de distancias integrados con una computadora mediante programación en lenguaje C. De esta manera, los datos son transmitidos de manera eficiente a la computadora y pueden ser procesados.

Métodos para obtener la función de transferencia

Se siguió la metodología descrita anteriormente para cada una de las técnicas, utilizando los valores reales descritos en la tabla 1. En comparación de otros trabajos [4], solo se obtuvo la función de transferencia por espacio de estados y transformada de Laplace. Por lo anterior, dada la metodología aplicada en esta investigación, se llegó a una representación del sistema con mayor validación debido a su múltiple comprobación gracias a la aplicación de distintas técnicas que arrojaron la misma función de transferencia apreciada en el comportamiento de la señal.

Los diagramas de bloques para ambas salidas son iguales a los que se aprecian en las figuras 2 y 3. Por lo tanto, se mantienen las mismas ecuaciones de transferencia (ecuación 7 y 8) para y_1 y y_2. De igual manera, para el método de Mason, los diagramas propuestos para el sistema ideal (figura 4 y 5) siguen siendo aplicables para el sistema real. Para la representación en espacio de estados, esta vez utilizando los parámetros del sistema real (ver Tabla 1), se obtuvieron las funciones de transferencia que se muestran en las ecuaciones 17 y 18.

$$y_1 = \frac{0.2208\, s^2 - 1.648e^{-15}\, s + 66.23}{s^4 + 0.08468\, s^3 + 603.2\, s^2 + 25.4\, s + 2.599e04} \qquad (17)$$

$$y_2 = \frac{66.23}{s^4 + 0.08468\, s^3 + 603.2\, s^2 + 25.4\, s + 2.599e04} \qquad (18)$$

A continuación, se invierte el proceso, y, con las ecuaciones 20 y 21 se obtuvieron las matrices del espacio de estados. Para la salida y_1:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2.599x104 \\ 1 & 0 & 0 & -25.4 \\ 0 & 1 & 0 & -603.2 \\ 0 & 0 & 1 & -0.08468 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 66.23 \\ 0 \\ 0.2208 \\ 0 \end{pmatrix}, C = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1), D = 0$$

Y, para la salida y_2:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2.599x104 \\ 1 & 0 & 0 & -25.4 \\ 0 & 1 & 0 & -603.2 \\ 0 & 0 & 1 & -0.08468 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 66.23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1), D = 0$$

En el caso de la discretización, se siguió el mismo procedimiento y también se aplicó un tiempo de muestreo de 0.05. Se obtuvieron las siguientes funciones de transferencia descritas en la ecuación (19) y (20).

$$y_1 = \frac{2.589x10^{-4}\, z^3 - 7.729x10^{-5}\, z^2 - 7.643x10^{-5}\, z + 2.586x10^{-4}}{z^4 - 2.644\, z^3 + 3.43\, z^2 - 2.639\, z + 0.9958} \qquad (19)$$

$$y_2 = \frac{1.639x10^{-5} + 1.656x10^{-4}\, z^2 + 1.655x10^{-4}\, z + 1.635x10^{-5}}{z^4 - 2.644\, z^3 + 3.43\, z^2 - 2.639\, z + 0.9958} \qquad (20)$$

La señal generada se mostrará en las figuras 14 y 15 acompañadas de las respuestas calculadas para la función de transferencia real.

Comprobación de los resultados

Una vez ejecutadas las técnicas al aplicar los valores reales descritos en la tabla 2, , se compararon las respuestas mediante bloques de Simulink para corroborar que su comportamiento coincida.

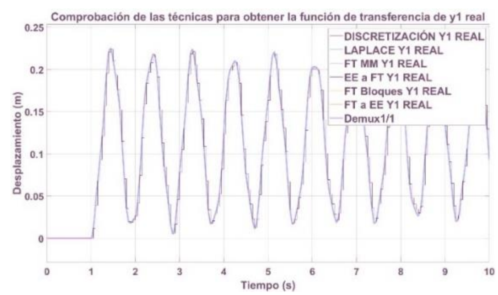


Figura 13. *Comprobación de las técnicas para determinar la función de transferencia para y_1 real y su discretización.*

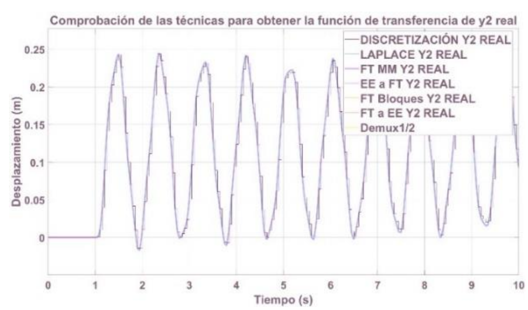


Figura 14. *Comprobación de las técnicas para determinar la función de transferencia para y_2 real y su discretización.*

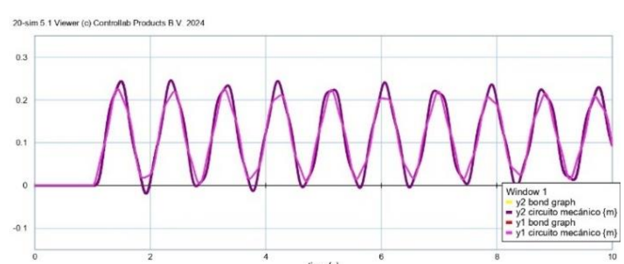


Figura 15*. Simulación en 20 Sim del modelo mecánico y gráfico de bond representativos del sistema real.*

En el programa se definieron bloques de cada una de las técnicas, salvo bond graph. Esta última se ejecutó en el programa 20 Sim, dando como resultado la señal de respuesta presentada en la figura 15.

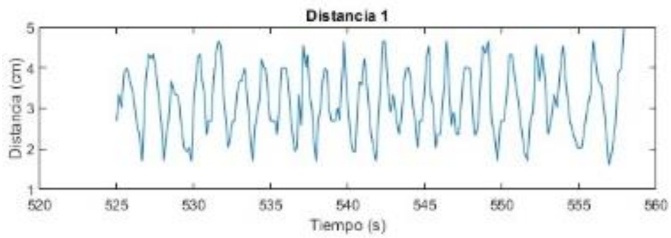


Figura 16. *Simulación en tiempo real en Matlab para* y_1.

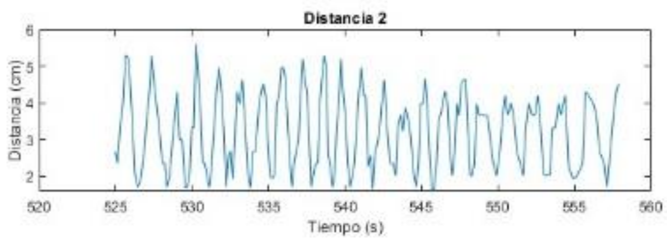


Figura 17. *Simulación en tiempo real en Matlab para* y_2.

Al correr el sistema se generaron dos scope para mostrar las gráficas de salida, uno para y_1 y otro para y_2, representados en las figuras 13 y 14 respectivamente. Al analizar las figuras es notable que todas las líneas evaluadas se sobreponen, lo que indica que la señal es la misma. Al momento de comprarlas con el modelado inicial con los valores del ejemplo (tabla 1) encontramos un comportamiento similar.

Por último, en la figura 15 se encuentra la ejecución de la técnica de Bond graph en el programa 20 Sim. Se aprecia que las señales generadas por el gráfico de bond y el circuito mecánico corresponden. Lo anterior también muestra un comportamiento muy similar a las señales generadas en las figuras 16 y 17 en Matlab, por lo que se puede afirmar que la ejecución es correcta.

Por último, en las figuras 17 y 18 se muestran las gráficas del sistema físico en tiempo real. En éstas se aprecia un comportamiento similar al calculado y simulado con las técnicas antes mencionadas con una ligera discrepancia entre las señales simuladas con valores reales y el sistema físico.

Lo anterior ocurre porque los sistemas previamente modelados son ideales, mientras que el sistema físico se ve afectado por factores externos como señales de ruido o inestabilidad en los sensores, lo cual puede afectar la señal de salida del sistema físico [15]. Estos factores pueden ser problemas de reflexión, frecuencias externas y/o cuestiones transversales [16].

Conclusiones

Es posible obtener la función de transferencia mediante diversas técnicas. Ya que nos puede dar los mismos resultados, cada una de éstas tiene sus ventajas y desventajas. Una de ellas es el diagrama de bloques, que es una técnica simple donde se aplican fórmulas para realizar operaciones entre bloques y otra que existen múltiples formas de resolverlo. Sin embargo, es un proceso un poco más extenso que en otras técnicas y, como se aprecia en los resultados, la función de transferencia resulta en una expresión muy larga. Algo similar ocurre con el método de Mason, puesto que se basa en la técnica anterior, sin embargo, al determinar sus componentes (lazos y trayectorias) es fácilmente ejecutable en softwares especializados como lo es Matlab. Siguiendo con Bond graph, es una técnica sencilla puesto que solo debe generarse el diagrama de bond y definir sus parámetros, pero, necesita del software 20 Sim para ejecutarse. Por último, el espacio de estados destaca por su alta aplicabilidad a diversos tipos de sistemas y por su capacidad para representar de manera clara la interacción entre las variables internas, así como sus efectos en el comportamiento general del sistema. No obstante, en sistemas de alto orden, que cuente con un número considerable de variables de estado, el trabajo con matrices grandes puede incrementar la dificultad y aumentar el riesgo de cometer errores durante el análisis o los cálculos.

Dependerá de las propiedades del sistema y de cada usuario, y de sus conocimientos y herramientas, determinar qué técnica desea utilizar.

En este estudio, las tres técnicas que se aplican en Matlab generaron la misma función de transferencia.

De igual manera, la discretización calculada representa adecuadamente el sistema y nos permite tener una representación de este con menos recursos y sin perder la precisión de los resultados.

Por último, el sistema real propuesto nos permite entender a profundidad el comportamiento de un sistema masa-resorte-amortiguador. La señal del sistema físico presentó ruido, sin embargo, el comportamiento fue similar al simulado.

Reconocimientos

En primer lugar, agradecemos a nuestra institución, Tecnológico Nacional de México campus Culiacán, por proporcionarnos los recursos académicos y de infraestructura necesarios para el desarrollo del proyecto. Al SECIHTI por el apoyo como becarios nacionales.

Referencias

[1] Ogata, K., Ingeniería de control moderna. 5ta. Ed. Madrid: PEARSON EDUCACIÓN. Prentice Hall Pearson. 2010.

[2] Llata García, J. R., Gonzáles Sarabia, E., Fernández Pérez, D., & Torre Ferrero, C., Modelado de Sistemas de Control. Universidad de Cantabria. Recuperado 3 de diciembre de 2024, de https://ocw.unican.es/pluginfile.php/1829/course/section/1438/capitulo_1.pdf

[3] Espinosa Justo, E., Linares Flores, J., Barahona Avalos, J., Guerrero Ramírez, E. O., & Sandoval García, A. P., Control Proporcional-Integral-Generalizado de un Sistema Masa-Resorte-Amortiguador. VI Semana Nacional de Ingeniería Electrónica , (págs. 25-32). Oaxaca, 2010.

[4] Hernández Zárate , J. A., Servín Martínez, A., Morales Tassinari, A. M., Domínguez Sánchez, G., & Gómez Acevedo, H. M., MODELADO Y SIMULACION DE UN ABSORBEDOR DE VIBRACIONES USANDO TECNICAS DE CONTROL PARA UN SISTEMA MECANICO . REVISTA ELECTRONICA EN INGENIERIA MECANICA , 1-16. 2016.

[5] electronica, W., Diagrama de bloques- Solución por fórmula de ganancia de Mason. Obtenido de Wilaeba electronica: https://wilaebaelectronica.blogspot.com/2020/03/diagrama-de-bloques-solucion-por-formula-de-ganancia-de-mason.html

[6] UNAM. (2018). Reogramas (Diagramas de flujo de señal). Obtenido de Universidad Nacional Autónoma de México: https://virtual.cuautitlan.unam.mx/intar/ime/reogramas-diagramas-de-flujo-de-senal/

[7] Siemens. The Basics Of The Bond Graph Theory. https://community.sw.siemens.com/s/article/the-basics-of-the-bond-graph-theory

[8] College of Engineering. Bond Graph Fundamentals. 2023. https://web.engr.oregonstate.edu/~webbky/ESE330_files/Section%202%20Bond%20Graph%20Fundamentals.pdf

[9] Borutzky, W. (2010). Bond Graph Methodology. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-84882-882-7

[10] Ogata, K., Sistemas de Control en Tiempo Discreto. 2da Ed. Prentice Hall. 1996.

[11] Mohammed, H., Uchenwa Linus Okafor, & Aliyu Jaafar Bello. (2023). An Investigation of Stability, Controllability and Observability of a Three Degree of Freedom Translational Mechanical System using State Space Approach. Applied Mathematics and Computational Intelligence (AMCI), 12(4), 76–93. https://doi.org/10.58915/amci.v12i4.82

[12] MathWorks. (s.f.). ss2tf. https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/ss2tf.html

[13] Barreiro, M., Discretización de ecuaciones. Obtenido de Modelización Numérica de la Atmósfera 2017: http://www.meteorologia.edu.uy/wp-content/uploads/2019/Modelacion_mumerica_atms/Tema2_17.pdf

[14] Zannin, C., Discretización. Obtenido de Hypergeo: https://hypergeo.eu/discretizacion/?lang=es

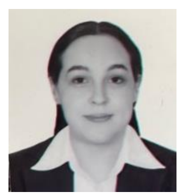
[15] Suhas, S., Wang, L., Golsby, N. & Lander, M., Optimización basada en la interacción fluido-estructura en turbinas de marea: una revisión desde una perspectiva. Revista de Ingeniería y Ciencia Oceánica, 7(2022), 449-461. https://doi.org/10.1016/j.joes.2021.09.017. 2022

[16] SOLIDAT. (8 de Abril de 2024). Resuelva los problemas de los sensores ultrasónicos: los problemas de reflexión, ruido y cruce se convierten en desafíos. Obtenido de SOLIDAT: https://es.solidat.net/news/solve-ultrasonic-sensor-problems-reflection-76500962.html

Semblanza Autores

Ing. Ayala García Mayra Mayte, estudiante de la Maestría en Ciencias de la Ingeniería, Tecnológico Nacional de México campus Culiacán.

Ing. Mendoza Aguilar Omar Alejandro, estudiante de la Maestría en Ciencias de la Ingeniería, Tecnológico Nacional de México campus Culiacán.



Ing. Meza Ibarra Kassandra, estudiante de la Maestría en Ciencias de la Ingeniería, Tecnológico Nacional de México campus Culiacán.

Ing. Moreno Nuñez Xiomara Vianey, estudiante de la Maestría en Ciencias de la Ingeniería, Tecnológico Nacional de México campus Culiacán.

Dr. Guillermo Javier Rubio Astorga Ingeniero Eléctrico por el Tecnológico Nacional de México, Campus Culiacán. Maestro en Ciencias en Ingeniería Eléctrica y Doctor en Ciencias en Ingeniería Eléctrica por el CINVESTAV del IPN, Unidad Guadalajara.

Dr. Gaxiola Sánchez Omar Iván, Ingeniero Electrónico por Tecnológico Nacional de México, Campus Culiacán (2003), Maestro en Ciencias en Sistemas Digitales por CITEDI (2005) y Doctor en ciencias de la información por la UAS (2019).